freeな数式処理ソフトSageの学部教育での活用事例 (数学ソフトウェアと教育 : 数学ソフトウェアの効果的利用に関する研究)

木村, 巌

数理解析研究所講究録
第 1865 巻 2013 年 101-109

free な数式処理ソフト Sage の学部教育での活用事例

木村巌*

本稿では，フリーな統合数学ソフト Sage を理学部数学科 2 年生（前期）の線形代数学の講義で使い，授業改善に役立てた事例を報告する．

1 Sage とは

Sage は，フリーの統合数学ソフトである．フリーソフトウエアとして開発・公開が行われており，数値計算に止まらず，数式処理やグラフィックの描画を行うことができる．

プロジェクトのリーダーは，W. Stein 氏（Washington 大）である．商用の統合数学ソフト，Mathematica, Maple, Matlab, Magma などを置き換えることを目標に掲げている．

Sage は現時点で，Apple MacOS X, Linux などの各種 Unix 互換 OS, Microsoft Windows[*1] 上で実行できる．また，Apple iOS デバイスや Google Android 端末の上で UI 部分を走らせることができる（実際の計算は，Sage の公開サーバなどを用いる）．

プロジェクトのウェブページは `http://www.sagemath.org/` である．検索する際には，`sagemath` で検索するとよい．

Sage の開発は，もともとは数論幾何，特に，Stein 氏の専門である，代数体・有限体上の楕円曲線や Abel 多様体，保型形式といった対象の具体的な計算を目的に始まった．数論研究者向けの Sage の紹介として，拙稿もご覧いただければ幸いである [Kim12]．

プロジェクトが進展するにつれ，さまざまな数値計算・数式処理・グラフィックの機能が追加され，現在では群論，環論（Gröbner 基底）や代数幾何，組合せ論や表現論の専門的な計算の他，2D/3D グラフィックやレイトレーシングによる描画ができる統合数学ソフトとなった．

プロジェクトのモットーの一つが，「車輪を再発明せず，車を作ろう！」である．既存のオープンソース・フリーソフトを組み合わせて，統合数学ソフトウェアを構築している．例えば，数式処理は Maxima/Singular, 線形代数は Linbox や LAPACK, 代数体の数論は pari-gp や Kash, 群論には GAP などである．これらを，Python という，非常に普及したスクリプト言語で統合

---

* 富山大学大学院理工学研究部（理学）

*1 Windows 上での実行は，実際には Oracle VirtualBox 上で Linux の仮想マシンを起動し，そこで Linux 版の Sage を実行している

している．また，ノートブック風のフロントエンドはウェブブラウザで実現している．Sage に内蔵されたウェブサーバを経由して，ブラウザと Sage とがクライアント・サーバをなし，計算結果の表示には，HTML, CSS, jsmath といった既存の技術を用いている．

オープンソースソフトウェアとして，開発過程も広く公開されている．Sage のソースコードは分散バージョン管理システム[*2]に保存され，不具合などはバグトラックシステムで管理されている．また，開発者やユーザのメーリングリストは Google Groups 上におかれていて，活発に議論されている．さらに，数ヶ月に一度の割合で，開発者等による会合 Sage Days が世界各地で開催されている．

国内でも Sage は広く使われるようになっている．使うだけではなく，不具合の修正や機能の追加など，開発への参画も意図して，2012 年 5 月には Sage Days が九州大学で開催された[*3]．その時の様子については，横山氏・沼田氏による報告 [横沼] を参照されたい．

2 Sage を使った線形代数の授業

Sage のような CAS（Computer Algebra System）を，学部の線形代数の授業で使う理由はなんだろうか．今回の対象は，富山大学理学部数学科の 2 年生が，前期に受講する線形代数学の講義である．受講対象者は約 50 名強．内容は，実数体・複素数体上の多項式の復習をしてから，固有値と固有ベクトル，内積空間，内積空間上の自己共役・正規作用素とそれらの対角化，までである（ちなみに教科書は Axler [Axl97] で，Chapter 4 から Chapter 7 の途中までだった．）また，Sage を使って，2D/3D のグラフィックや計算例を提示することが主で，受講者に Sage を使わせるということは，講義の際にはしていない．

まず，3 次元のベクトル空間における幾何的な直感を助けるために，グラフィックによる部分空間の提示を行った（図 1）．

受講者らが学んだ高校のカリキュラムでは，空間における平面は，座標軸に直交するものしか扱っていない（一般の平面の方程式も含まれない）．板書で，あまり上手でない平面の絵を見せられても，直感的に把握しづらいかもしれない．Sage を使って提示すれば，拡大縮小の他，回転させることもでき，大いに理解を助けることができる．

また，線形変換 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ の図示例として，「ネコ写し」（図 2）を提示した．直線と半円で構成されたネコ（のように見える絵）を，$\pi/4$ 回転し $\sqrt{2}$ 倍拡大したネコ（斜めになっているの絵）に写し，重ねて描画したものである．鼻の頭のあたりに原点があり，そこは固定されている．同様に，線形変換の図示例として，上と同じ線形変換により，格子点がどのように移動するかを

[*2] これまで Mercurial で管理されてきたが，Git への移行が計画されている．

[*3] 横山俊一氏，沼田泰英氏の主催，`http://www.stat.t.u-tokyo.ac.jp/~numata/html/sage/days/201206/index.ja.html`

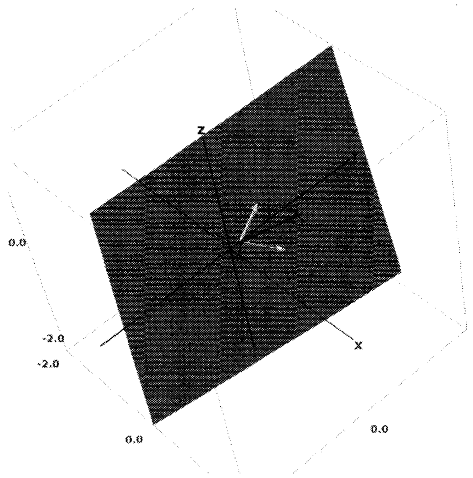


図 1　$\mathbf{R}^3$ における平面と，ベクトルの図示.

図示したのが，図 3 である.

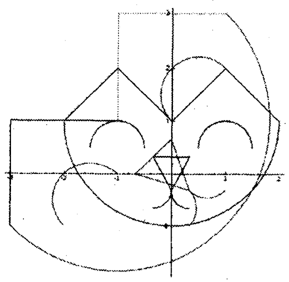


図 2　ネコ写し

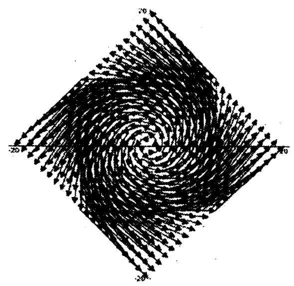


図 3　平面上の格子点の移動.

Sage は数式処理システムでもあるので，その性質を活かした例も紹介した. n 次以下の実係数多項式の全体 P_n に，内積を

$$(f(x),\, g(x)) := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad f(x), g(x) \in P_n,$$

と入れる. 基底 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ に Gram-Schmidt の直交化を行うことができる. また, $\sin(x)$ を，例えばたかだか 5 次の多項式で近似する際に，上の内積（但し積分区間は $[-\pi, \pi]$）から導かれるノルムに対して，直交射影の方法を使い，よい近似を得ることができる. これらの手続きを，Sage のノートブックとして実現することができた（付録を参照).

以上のように，グラフィックや具体例を，Sage を用いて提示しながら講義を行い，期末試験の際にアンケートを行った. 設問は，「Sage や Mathematica[*4]のような CAS を用いた数学の勉

[*4] 本講義では Mathematica は取り上げなかったが，富山大学では Mathematica のフローティングライセンスを購入しており，受講者らは他の講義などで見ているはずである.

強に興味があるか？」である．回答は自由記述式とした．有効回答は 13 で多くないが，その内訳は

- ある（5 名）
- ない（8 名）

であった．記述から「ない」とした理由を拾うと，「数学だけでも難しいのに，数式処理のようなものを使うと，よりややこしくなる」ということであった．

これはもっともな回答であり，CAS を教育に用いる際には，数学の内容を伝える授業なのか，それとも CAS の使い方を伝える授業なのかをはっきりさせる必要がある．

一方，Sage に興味を示した 5 名を対象に，夏休み期間中に Sage のハンズオンセミナーを開催した．Microsoft Window のパソコン（1 名は自分のノートパソコンを持ち込み，それ以外はこちらで用意したデスクトップパソコン）に，Sage をインストールするところから始めた．実際には，仮想化ソフトの Oracle VirtualBox のインストール，Windows 用 Sage のディスクイメージのダウンロード，インストールなどを経て，ブラウザを経由して Sage のノートブックを使うところまで経験した．また，Sage 公開サーバの `http://www.sagenb.org/` の使用も体験してもらった．

Sage がフリーソフトである利点は，この様に，興味を持ってくれた人に，すぐに使ってもらえ，また DVD などに焼いて無償で配布できることである．

一方，課題となるのは，上述のように，数学その物に加えて，CAS のような環境で数学を行うことのハードルの高さ，ユーザの多い Microsoft Windws へのインストールの手間，さらに，初心者向けの日本語での文献が少ないことが挙げられる．

3　まとめ

本稿では，*free* な統合数学ソフト Sage の簡単な紹介を行い，これを用いた線形代数の講義の事例を報告した．教員がグラフィックや計算例を提示する為には，十分高機能である一方で無償であることなど，メリットが大きい．一方，多くの受講者にとっては，自ら使うには，最初はやや敷居が高いかもしれないことが分かった．しかし，意欲的な受講者には，数学を深く学ぶための格好のツールであり，今後教育の現場で，ますます Sage は使われていくものと思う．

末筆ながら，RIMS 研究集会「数学ソフトウェアと教育—数学ソフトウェアの効果的利用に関する研究—」でお世話いただきました皆様，特に研究集会へお誘いくださいました，中村泰之先生（名古屋大学大学院情報科学研究科）に御礼申し上げます．

参考文献

[Axl97] Sheldon Axler, *Linear algebra done right*, second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1482226 (98i:15001)

[Kim12] Iwao Kimura, 数論研究者のための *Sage*, Proceedings of the Symposium on Algebraic Number Theory and Related Topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B32, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012, pp. 125–144.

[横沼] 横山俊一 and 沼田泰英, *Sage Days in Japan* 開催報告, 数式処理研究の新たな発展, RIMS Kôkyûroku, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, to appear.

付録：Sage notebookの例

Gram-Schmidt orthogonalization

This is an example of Gram-Schmidt orthogonalization in a vector spaces defined by polynomials and integrals. （この付録は、すべてSage notebook上で書いたものである。）

変数xを定義する.

```
x=var('x')
```

内積を定義する（念頭に置いているのは，たかだかn次以下の実係数多項式の全体がなす実ベクトル空間）.

$$\langle a, b \rangle := \int_0^1 a(x)b(x)\,dx.$$

```
def innerprod_integration_0_1(a, b):
    return integrate(a*b, (x, 0, 1))
```

ノルムを定義する：

$$\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}.$$

```
def mynorm(a, inner_product_function):
    return sqrt(inner_product_function(a, a))
```

試しに、$1, x, x^2$のノルムを計算してみる.

```
mynorm(1, innerprod_integration_0_1)
```

1

```
mynorm(x, innerprod_integration_0_1)
```

$\sqrt{\frac{1}{3}}$

```
mynorm(x^2, innerprod_integration_0_1)
```

$\sqrt{\frac{1}{5}}$

Gram-Schmidtの直交化法.

内積空間$(V, \langle , \rangle)$を考える．一次独立なベクトルの組$(v_1, \ldots, v_m)$が与えられたとき，次のようにしてorthonormal system $(e_1, \ldots, e_m)$を定める手続きを，Gram-Schmidtの直交化法というのだった．

$$e_j := \frac{f_j}{\|f_j\|}, \quad f_j = v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \langle v_j, e_k \rangle e_k, \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

```
def gram_schmidt(vs, inner_product_function):
    ret = []
    for v in vs:
        f = v - sum([inner_product_function(v, r)*r for r in ret])
        ret.append(f/(mynorm(f, inner_product_function)))
    return(ret)
```

$P_3(\mathbf{R})$, たかだか3次の実係数多項式全体に，上で定義した内積で，Gram-Schmidtをやってみる．

```
rs = gram_schmidt([1,x,x^2, x^3], innerprod_integration_0_1)
```

```
for r in rs:
    print r.factor()
```

```
1
(2*x - 1)*sqrt(3)
(6*x^2 - 6*x + 1)*sqrt(5)
(2*x - 1)*(10*x^2 - 10*x + 1)*sqrt(7)
```

Orthogonal projectionの計算

ベクトル空間Vの部分空間Uに対して，射影$P_U : V = U \oplus U^\perp \to U$をorthogonal projection（直交射影）というのだった．$f \in V$の直交射影$P_U(f)$は，$(e_1, \ldots, e_m)$がUのorthonormal basisのとき，次のようにして計算できる：

$$P_U(f) := \sum_{j=1}^{m} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

```
def orthogonal_projection(f, bases, inner_product_function):
    """This function computes the orthogonal projection of f onto the subspace
spanned by bases"""
```

```
    return(sum([inner_product_function(f, base)*base for base in bases]))
```

$\sin(x)$の直交射影による多項式近似.

```
def innerprod_integration_minus_pi_pi(a, b):
    return integrate(a*b, (x, -pi, pi))
```

```
sin_approx=orthogonal_projection(sin(x), gram_schmidt([1,x,x^2,x^3,x^4,x^5],
innerprod_integration_minus_pi_pi), innerprod_integration_minus_pi_pi)
```

```
sin_approx.expand().simplify_full()
```

$$\frac{21\,(33\,(\pi^4-105\,\pi^2+945)x^5-30\,(\pi^6-125\,\pi^4+1155\,\pi^2)x^3+5\,(\pi^8-153\,\pi^6+1485\,\pi^4)x)}{8\,\pi^{10}}$$

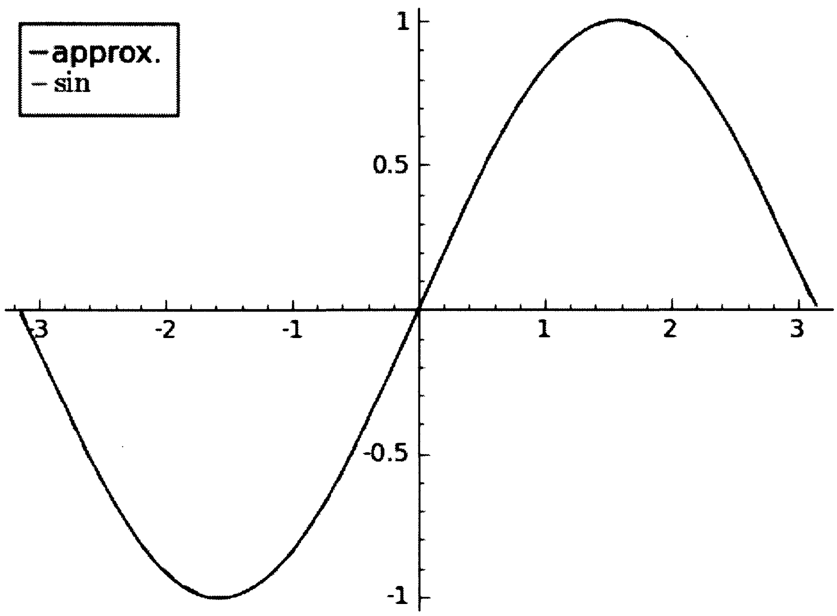
係数を近似値で見てみると次のようになる：

```
sum([RR(c[0])*x^c[1] for c in sin_approx.coefficients()])
```

$$0.00564311797634677\,x^5-0.155271410633428\,x^3+0.987862135574673\,x$$

青線が多項式近似, ダッシュの赤線が$\sin(x)$. 重なっていてほとんど誤差なし.

```
(plot(sin_approx, (x, -pi, pi), legend_label='approx.')+plot(sin(x), (x, -pi,
pi), color='red', linestyle='--', legend_label='$\sin$')).show(figsize=5)
```



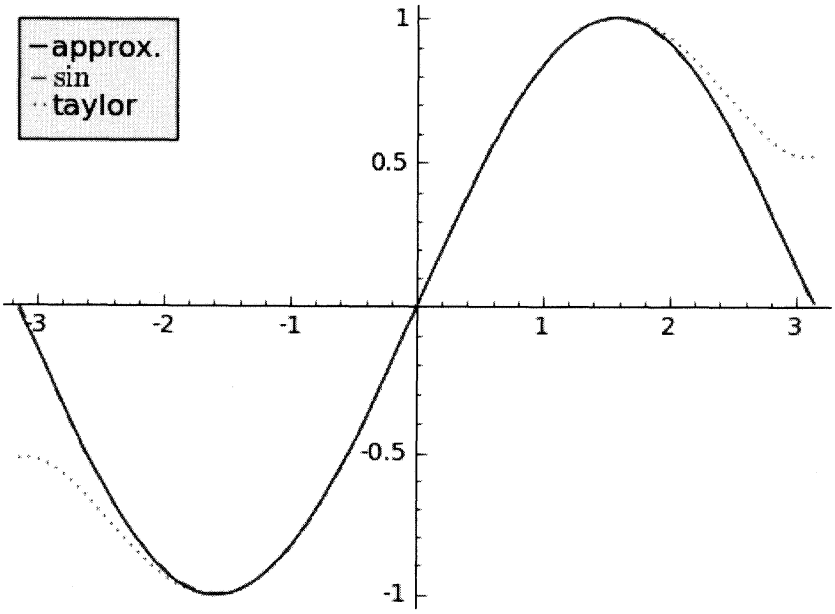
テイラー展開との比較.

```
taylor(sin(x), x, 0, 5)
```

$\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$

直交射影による多項式近似（青の実線），$\sin(x)$（赤のダッシュ線），Taylor展開による近似（緑の点線）を重ねてプロットする．Taylor展開では，区間の端での近似があまりよくないことがわかる．

```
(plot(sin_approx, (x, -pi, pi), legend_label='approx.')+plot(sin(x), (x, -pi,
pi), color='red',linestyle='--', legend_label='$\sin$')+plot(taylor(sin(x), x,
0, 5), (x, -pi, pi), color='green', linestyle=":",
legend_label='taylor')).show(figsize=5)
```



以上．